Corrigé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(2 ; 4 ; 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& 3+t\\ z &=& 3+t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** La droite $\mathscr{D}'$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\left\{\begin{array}{rcl} x-2 &=& t\\ y-4 &=& 2t\\ z-0 &=& 0t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

La droite $\mathscr{D}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 4+2t\\ z &=& 0\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M′ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM′ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

- $\vec{v}\cdot\vec{u} = 2\times1+(-1)\times2+1\times0 = 0$ donc $\vec{v}\perp\vec{u}$.
- $\vec{v}\cdot\overrightarrow{u'} = 2\times0+(-1)\times1+1\times1 = 0$ donc $\vec{v}\perp\overrightarrow{u'}$.

Le vecteur $\vec{v}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, donc c'est un vecteur directeur de leur perpendiculaire commune Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$.

- $\vec{n}\cdot\vec{u} = 2\times1+(-1)\times2+(-5)\times0 = 0$ donc $\vec{n}\perp\vec{u}$.
- $\vec{n}\cdot\vec{v} = 2\times2+(-1)\times(-1)+(-5)\times1 = 0$ donc $\vec{n}\perp\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$, donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. Le plan $\mathscr{P}$ est le plan ayant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal et passant par A, donc c'est l'ensemble des points $\mathrm{P}(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{n}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{n} &\iff (x-2)\times 2 + (y-4)\times(-1) + z \times (-5) = 0 \\ &\iff 2x-4-y+4-5z = 0 \iff 2x-y-5z=0 \end{aligned}$$

Donc une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x-y-5z=0$.

c. On rappelle que M′ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.

Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite Δ et M′ est un point de la droite Δ ; donc M′ est un point du plan $\mathscr{P}$. M′ appartient à $\mathscr{D}'$ et à $\mathscr{P}$ donc M′ est le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de M′ vérifient donc le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ y &=& 3+t \\ z &=& 3+t \\ 2x-y-5z &=& 0 \end{array}\right.$

$2x-y-5z=0$ devient $2\times 3-(3+t)-5(3+t)=0$ soit $6-3-t-15-5t=0$ ou encore $-12=6t$ ce qui donne $t=-2$.

$x=3$; $y=3+t=3-2=1$ et $z=3+t=1$

Les coordonnées du point M′ sont donc $(3\,;1\,;1)$.

4. a. La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et passe par le point M′, donc elle a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+2t' \\ y &=& 1-t' \\ z &=& 1+t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}$.

b. Le point M est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& 4+2t \\ z &=& 0 \\ x &=& 3+2t' \\ y &=& 1-t' \\ z &=& 1+t' \end{array}\right.$

On a donc $\left\{\begin{array}{rcl} 2+t &=& 3+2t' \\ 4+2t &=& 1-t' \\ 0 &=& 1+t' \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcl} t &=& -1 \\ -1 &=& t' \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& 4+2t \\ z &=& 0 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& 2 \\ z &=& 0 \end{array}\right.$

Donc le point M a pour coordonnées $(1\,;2\,;0)$.

c. $$\begin{aligned} \mathrm{MM}' &= \sqrt{(x_{\mathrm{M}'}-x_{\mathrm{M}})^2 + (y_{\mathrm{M}'}-y_{\mathrm{M}})^2 + (z_{\mathrm{M}'}-z_{\mathrm{M}})^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(1-0)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5t \\ y &=& 2+5t \\ z &=& 1+t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. On cherche l'intersection de la droite d et du plan $\mathscr{P}$, et pour cela on résout le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5t \\ y &=& 2+5t \\ z &=& 1+t \\ 2x-y-5z &=& 0 \end{array}\right.$

On a donc $2\times(5t)-(2+5t)-5(1+t)=0$ soit $10t-2-5t-5-5t=0$ ou $0t=7$.

Le système n'a pas de solution donc la droite d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.

On veut exprimer le volume V du tétraèdre ANMM′ en fonction de ℓ.

$V=\dfrac{1}{3}\times B\times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Les points A, M et M′ appartiennent au plan $\mathscr{P}$ donc le triangle AMM′ forme une base du tétraèdre dont la hauteur est la distance du point N au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire ℓ.

La droite Δ est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ donc $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à Δ.

A appartient à $\mathscr{D}$, M est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ, M′ appartient à Δ, et les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont perpendiculaires. On peut en déduire que le triangle AMM′ est rectangle en M.

$$\begin{aligned}\mathrm{AM} &= \sqrt{(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}})^2+(z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}})^2}\\ &= \sqrt{(1-2)^2+(2-4)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

L'aire de la base, c'est-à-dire AMM′ vaut $\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AM}\times\mathrm{MM}'=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

Le volume du tétraèdre vaut donc $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{30}}{2}\times\ell=\dfrac{\ell\sqrt{30}}{6}$.

c. N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d.

La droite d est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$ donc les distances de N_1 et N_2 au plan $\mathscr{P}$ sont égales.

Les bases des tétraèdres $\mathrm{AN_1MM'}$ et $\mathrm{AN_2MM'}$ sont identiques (le triangle AMM′).

Donc les tétraèdres $\mathrm{AN_1MM'}$ et $\mathrm{AN_2MM'}$ ont le même volume.